



TITLE:

楕円関数とそれに関連する定数の
計算について (科学計算基本ライ
ブラリーのアロリズムの研究会報
告集)

AUTHOR(S):

清野, 武

CITATION:

清野, 武. 楕円関数とそれに関連する定数の計算について (科学計算基本ライブラリーのアロリズムの研究会報告集). 数理解析研究所講究録 1970, 91: 142-169

ISSUE DATE:

1970-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/108130>

RIGHT:

楕円関数とそれに関連する定数の 計算について

京大 工学部 清野 武

1. 母数 k を与えて q を計算すること

1.1. 基本式⁽²⁾

古くから知られているように,

$$\sqrt{k'} = \sqrt{1-k^2} = \vartheta_4 / \vartheta_3 \quad (1.1)$$

の関係を利用する方法が一般に採用されている。すなわち,

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} \quad (1.2)$$

を仲介として,

$$\varepsilon = \frac{q + q^9 + q^{25} + \dots}{1 + 2q^4 + 2q^{16} + \dots} \quad (1.3)$$

または,

$$q = \varepsilon + 2\varepsilon^5 + 15\varepsilon^9 + 150\varepsilon^{13} + 1707\varepsilon^{17} + \dots \quad (1.4)$$

から q を求める。また必要ならばつぎの関係を利用する。

$$q' = \exp(\pi^2 / \log q) \quad (1.5)$$

1.2. procedure QK(Q, K2)⁽⁸⁾

これは k^2 を与えて q を求めるためのもので,

(i) $k^2 \leq 1/2$ に対しては,

$$\varepsilon = k^2 / (2(1 + \sqrt{k'})^2(1 + k')) \quad (1.6)$$

$$q = \varepsilon + 2\varepsilon^5 + 15\varepsilon^9 \quad (1.7)$$

によって計算する。

(ii) $k^2 > 1/2$ に対しては, k と k' の立場を入れかえて, さきに q' を求めてから,

$$q = \exp(\pi^2 / \log q') \quad (1.8)$$

によって q を計算する。

東京大学の QNOM(X2, Q)⁽⁷⁾ と異なる点は, (1.2) の桁落ちを防ぐために (1.6) を用いたこと, および $0 \leq k^2 < 1$ を二つの領域に分け, (1.3) を繰り返し法で解くかわりに, 直接 (1.7) で計算したことである。

2. 母数 k を与えて完全楕円積分 K, E を求めること

2.1. 種々の計算法

(1) 超幾何級数

$$K = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2\right) \quad (2.1)$$

$$E = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, k^2\right) \quad (2.2)$$

東京大学のCEIE(X2)⁽⁷⁾は $k^2 \leq 0.2$ に対して (2.2) を用いている。

(2) Landen の変換^{(1),(2)}

母数 k に対して,

$$k_1 = (1 - k') / (1 + k') \quad (2.3)$$

を計算すれば, k_1 に対する周期比 K_1'/K_1 は, k に対する K'/K の2倍になる。

$$K = (1 + k_1) K_1 \quad (2.4)$$

$$E = 2 E_1 / (1 + k_1) - (1 - k_1) K_1 \quad (2.5)$$

この変換を繰り返せば,

$$K_{n-1} = (1 + k_n) K_n \quad (2.6)$$

$$E_{n-1} = 2 E_n / (1 + k_n) - (1 - k_n) K_n \quad (2.7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \pi/2 \quad (2.8)$$

より, K および E を計算することができる。

(3) 算術幾何平均⁽³⁾

Landen の変換の変形であって, いはしば採用されている。

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 1, \quad b_0 = k', \\ a_r &= (a_{r-1} + b_{r-1})/2, \\ b_r &= \sqrt{a_{r-1} b_{r-1}}, \\ c_r &= (a_{r-1} - b_{r-1})/2 = a_r - b_{r-1} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

$$K = \pi / (2 a_n) \quad (2.10)$$

$$E = K \left(1 - \frac{1}{2} k^2 - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} 2^r C_r^2 \right) \quad (2.11)$$

(4) Landen の変換と超幾何級数

a. K_1, E_1 を k_1^2 の級数で表わす.

$$K = \frac{\pi}{2} (1+k_1) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k_1^2\right) \quad (2.12)$$

$$E = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+k_1} F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, k_1^2\right) \quad (2.13)$$

東京大学の CEIE(X2)⁽⁷⁾ は $k^2 > 0.2$ に対して, (2.13) を用いている.

b. K_2, E_2 を k_2^2 の級数で表わす.

$k^2 = 1/2$ に対し, $k_1 \simeq 0.17, k_2 \simeq 0.007$ となるので, この方法はかなり有効である. (後述).

$$K = (1+k_1)(1+k_2) K_2 \quad (2.14)$$

$$E = \frac{4E_2}{(1+k_1)(1+k_2)} - \frac{K_2}{1+k_1} [3 - k_2 - k_1^2(1+k_2)] \quad (2.15)$$

$$\left. \begin{aligned} K_2 &= \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} k_2^2 + \frac{9}{64} k_2^4 \right), \\ E_2 &= \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{4} k_2^2 - \frac{3}{64} k_2^4 \right) \end{aligned} \right\} k^2 \leq 1/2 \quad (2.16)$$

(5) q 級数^{(1), (2), (4)}

$$K = \frac{\pi}{2} \vartheta_3^2 = \frac{\pi}{2} (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots)^2 \quad (2.17)$$

または, $\vartheta_3 = (\vartheta_3 + \vartheta_4) / (1 + \sqrt{k'})$ より,

$$K = \frac{2\pi}{(1+\sqrt{k'})^2} (1+2q^4+2q^{16}+\dots)^2 \quad (2.18)$$

東京大学の CEIK (X2) は $k^2 \leq 1/2$ に対して, この式を用いている。実際には,

$$K = 2\pi (1+2q^4)^2 / (1+\sqrt{k'})^2 \quad (2.18')$$

で十分である ($k^2 = 1/2$ のとき, $q^{16} < 0.15 \times 10^{-21}$)。

E に対しては, 基本式

$$E = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} (e_1 \omega_1 + \eta_1) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{v_3^2} \left(-\frac{v_2''}{\pi^2 v_2} \right) \quad (2.19)$$

より, つぎのような展開式が導かれる。⁽¹⁰⁾

$$E = \frac{\pi}{2} \frac{1}{v_3^2} \left(\frac{1}{3} (1+v_3^4+v_4^4) - 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n q^{2n}}{1-q^{2n}} \right) \quad (2.20)$$

$$E = \frac{\pi}{2} \frac{1}{v_3^2} \left(1 - 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n n q^{2n}}{1-q^{2n}} \right) \quad (2.21)$$

$$E = \frac{\pi}{2} \frac{1}{v_3^2} \left(1 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2} \right) \quad (2.22)$$

$$E = \frac{\pi}{2} \frac{1}{v_3^2} \frac{1+9q^2+25q^6+\dots}{1+q^2+q^6+\dots} \quad (2.23)$$

計算には, (2.23) が適当であるか, 場合によっては, つぎの級数による方が有利である。

$$E = \frac{\pi}{2} \frac{1}{v_3^2} (1+8(q^2-q^4+4q^6-5q^8+6q^{10}-4q^{12}+8q^{14}$$

$$-13q^{16} + 13q^{18} - 6q^{20} + 12q^{22} - 20q^{24} + 14q^{26} - \dots)) \quad (2.24)$$

(6) η 級数⁽⁶⁾

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{K}{2\pi} (1 - \sqrt{1-k^2}), \\ E &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{1}{K} (1 + 8\eta^2 - 8\eta^4 + 24\eta^8 - 192\eta^{12} + \dots) \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

これは高橋秀俊教授によって開発されたもので、PC-1 のライブラリに採用されている。 η と q との間には、

$$\eta = \vartheta_2^2(0, q^2)/4 = q(1 + q^4 + q^{12} + q^{24} + \dots)^2 \quad (2.26)$$

の関係があり、 $k^2 = 1/2$ のとき、 $\eta \approx q = e^{-\pi}$ となるので、 $k^2 \leq 1/2$ に対し、(2.25) は極めて速く収束する。特に、 k^2 から出発して、 q を経由せずに、 E を求めるためには、この方式が最も有利であろう。

2.2. procedure QKK(Q, QBIS, KK, KKBIS, KORK2, M)⁽⁸⁾

および QKKEE(Q, QBIS, KK, KKBIS, EE, EEBIS, KORK2, M)⁽⁸⁾

QKK は k^2 または k を与えて、 q, q', K, K' を求めるためのもので、QKKEE は、このほかに E, E' を求める機能をもっている。ここでは QKKEE について説明する。

(1) QKKEE₁

(i) q, q' の計算は QK と同様。

(ii) $k^2 \leq 1/2$ に対し、(2.14) - (2.16) により、 K と E

を求める。ただし、析落ちを防ぐために、(2.3) の代りに、

$$k_1 = \frac{k^2}{2 + 2k' - k^2}, \quad k_2 = \frac{k_1^2}{2 + 2k_1' - k_1^2} \quad (2.26)$$

を使用する。

(iii) $k^2 \leq 1/2$ に対す K' , E' はそれぞれ、

$$\left. \begin{aligned} K' &= K / (\pi \log(1/\varepsilon)), \\ E' &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{K} + \left(1 - \frac{E}{K}\right) K' \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

による。

(iv) $k^2 > 1/2$ に対しては、 k と k' , q と q' , K と K' , E と E' の立場を入れかえる。

(2) QKKEE₂

(i) q, q' の計算は QK と同様。

(ii) $k^2 \leq 1/2$ に対し、(2.17) により K を、

$$E = \frac{\pi}{6v_3^2} (1 + (2 - k^2)v_3^4 - (144q^{10} + 168q^8 + 96q^6 + 72q^4 + 24q^2)) \quad (2.28)$$

により E を求める。

(iii) K', E' の計算ならびに $k^2 > 1/2$ に対する扱いは、QKKEE₁ の (iii), (iv) と同様。

注 1 QKK に対しては、(2.17) の代りに (2.18') を使用した。

注 2 (2.28) より、つぎの式の方が有利である。

$$E = \frac{\pi}{2} \frac{1}{v_3^2} (1 + 8(q^2 - q^4 + 4q^6 - 5q^8 + 6q^{10})) \quad (2.24')$$

(3) 試験結果

二つのプロセス $QKKEE_1$ と $QKKEE_2$ は、本質的に異なった方法（一方は Landen の変換，他方は q 級数）に基づいているにもかかわらず、有効数字 10 桁の範囲で、全く等しい結果を与える。

3. q を与えて v_1', v_2, v_3, v_4 を求めること

$v_1'(0, q)$ および $v_i(0, q)$ ($i=2, 3, 4$) は、基本的な定数として、極めて重要である。

$procedure\ THZERO(I, Q)^{(10)}$ は、これら四つの定数のうちの一つを求めるための *real procedure* であって、つぎの方針に従っている。

(i) $q < 0.043$ に対しては、

$$\left. \begin{aligned} v_1' &= 2\pi q^{1/4} (1 - 3q^2 + 5q^6), \\ v_2 &= 2q^{1/4} (1 + q^2 + q^6), \\ v_3 &= (1 + 2q^4) - 2q(1 + q^8), \\ v_4 &= (1 + 2q^4) + 2q(1 + q^8) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

(ii) これ以外の範囲では、

$$\begin{aligned}
 \nu_1' &= 2\pi \left(-\frac{\pi}{\log q}\right)^{3/2} q'^{1/4} (1 - 3q'^2 + 5q'^6), \\
 \nu_2 &= \left(-\frac{\pi}{\log q}\right)^{1/2} ((1 + 2q'^4) - 2q'(1 + q'^8)), \\
 \nu_3 &= \left(-\frac{\pi}{\log q}\right)^{1/2} ((1 + 2q'^4) + 2q'(1 + q'^8)), \\
 \nu_4 &= 2 \left(-\frac{\pi}{\log q}\right)^{1/2} q'^{1/4} (1 + q'^2 + q'^6)
 \end{aligned} \quad (3.2)$$

試験方法としては、つぎの二つを採用した。

(i) 前述の QK を利用して、 k^2 から q を求め、これを THZERO に入れて、既成の表⁽⁵⁾ (小数英以下 5 桁) と比較。

(ii) 恒等式^{(1),(2)}

$$\nu_2^4 + \nu_4^4 = \nu_3^4 \quad (3.3)$$

および

$$\nu_1' = \pi \nu_2 \nu_3 \nu_4 \quad (3.4)$$

の左右両辺を別々に計算し、両者の一致を確かめた。

結果は、 $q \leq 0.89$ の範囲で、有効数字 10 桁以上の一致を示した。

4. q を与えて k, K, E を求めること

ノーマル q を基調とする解析に当っては、前節の ν_i のほかに、定数 E, E' の計算が問題になる。

procedure CEIQ (KK, KKBIS, EE, EEBIS, K, KBIS, QBIS, Q)⁽¹⁰⁾ は、 q を与えて、 K, K', E, E', k, k', q' を

を求めるためのもので、つぎの式を利用している。

$$k = v_2^2 / v_3^2, \quad k' = v_4^2 / v_3^2 \quad (4.1)$$

$$K = (\pi/2) v_3^2 \quad (4.2)$$

$$E = ((\pi/6)/v_3^2) (1 + (2 - k^2) v_3^4 - (144 q^{10} + 168 q^8 + 96 q^6 + 72 q^4 + 24 q^2)) \quad (4.3)$$

$$K' = (K/\pi) \log(1/q) \quad (4.4)$$

$$E' = \frac{1}{v_3^2} - (1 - \frac{E}{K}) K' \quad (4.5)$$

ただし、これらはいずれも、 $q \leq 0.043$ に対するもので、それ以外の範囲では、 q と q' の立場を入れかえる。

試験はつぎの方法によった。

(i) QK と CEIQ を組み合わせ、QK の引数として与えた k^2 と、CEIQ の結果として得られた k^2 との一致を確認めた。

(ii) 同じ組み合わせで、 k^2 に対する K, K', E, E' を求め、既述の表なすびに、前述の QKKEE₁ の結果と比較した。

結果は、 $q \leq 0.7$ ($k^2 < 1.0 - 0.153 \times 10^{-10}$) に対して、10桁の精度が確認された。 $0.71 \leq q < 0.9$ でもほとんど問題は無いが、 E の値にわずかの誤差 (10桁目に1単位) が現れる。 $q \geq 0.9$ に対しては、 q' の underflow (HITAC 5020) のため、計算不能となる。対策については後述。

5. $\mathcal{V}_i(v, q)$ の計算

5.1. 変数領域の制限

4種類の \mathcal{V} 関数を, 2種類の計算に還元し, 変数の領域を, $0 \leq v < 1$ または $0 \leq v < 1/2$ に制限するため, つぎの関係を利用する.

(i) \mathcal{V}_1 に対しては,

$$s \leftarrow \text{sign}(v), \quad n \leftarrow \text{entier}(\text{abs}(v)),$$

$$v \leftarrow \text{abs}(v) - n,$$

$$\mathcal{V}_1(v) \leftarrow s \times (-)^n \mathcal{V}_1(v), \quad 0 \leq v < 1$$

(ii) \mathcal{V}_2 に対しては,

$$\mathcal{V}_2(v) = \mathcal{V}_1(v + 1/2) \quad (5.1)$$

によって, \mathcal{V}_1 の計算に帰着させる.

(iii) \mathcal{V}_3 に対しては,

$$\mathcal{V}_3(v) = \mathcal{V}_4(v - 1/2) \quad (5.2)$$

によって, \mathcal{V}_4 の計算に帰着させる.

(iv) \mathcal{V}_4 に対しては,

$$\mathcal{V}_4(v) = \mathcal{V}_4(\text{abs}(v) - n) \quad (5.3)$$

によって, 領域を $0 \leq v < 1$ に制限する.

(v) さらに必要ならば,

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{V}_1(v) &= \mathcal{V}_1(1-v), \\ \mathcal{V}_4(v) &= \mathcal{V}_4(1-v) \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

を利用し、領域を $0 \leq v < 1/2$ に制限する。

5.2. 虚数変換の応用^{(1),(2)}

q が小さいとき (たとえば $q \leq e^{-\pi}$) は,

$$\vartheta_1(v, q) = 2q^{1/4} (\sin \pi v - q^2 \sin 3\pi v + q^6 \sin 5\pi v - q^{12} \sin 7\pi v + \dots) \quad (5.5)$$

$$\vartheta_4(v, q) = 1 - 2q \cos 2\pi v + 2q^4 \cos 4\pi v - 2q^9 \cos 6\pi v + 2q^{16} \cos 8\pi v - \dots \quad (5.6)$$

を利用すればよいが、 q が大きいときは、虚数変換

$$\vartheta_1(v|\tau) = i\sqrt{\frac{i}{\tau}} e^{-(i\pi/\tau)v^2} \vartheta_1\left(\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) \quad (5.7)$$

$$\vartheta_4(v|\tau) = \sqrt{\frac{i}{\tau}} e^{-(i\pi/\tau)v^2} \vartheta_2\left(\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) \quad (5.8)$$

を利用するのが便利である。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1(v, q) &= \sqrt{\frac{K}{K'}} e^{-(\pi K/K')v^2} 2q'^{1/4} (\sinh \pi v' - q'^2 \sinh 3\pi v' + q'^6 \sinh 5\pi v' - \dots) \\ \vartheta_4(v, q) &= \sqrt{\frac{K}{K'}} e^{-(\pi K/K')v^2} 2q'^{1/4} (\cosh \pi v' + q'^2 \cosh 3\pi v' + q'^6 \cosh 5\pi v' + \dots) \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

ただし、

$$q' = e^{-\pi K/K'}, \quad v' = (K/K')v \quad (5.10)$$

東京大学の EJSN, EJCN, EJDN⁽⁷⁾ でも虚数変換公式が e^2

$> 1/2$ に対して用いられているが, (5.9) の形をそのまま使用することは極めて不経済であって, 実際には,

$$\rho' = q^{v'} = q'^v = \exp(-(\pi K'/K)v) \quad (5.11)$$

を一度計算するだけで, ρ' の級数 (実は有限の多項式) に還元される.

$$v_1(v, q) = \sqrt{\frac{\pi}{\log(1/q)}} q'^{v^2+1/4} [(\rho'^{-1} - \rho') - q'^2(\rho'^{-3} - \rho'^3) + q'^6(\rho'^{-5} - \rho'^5) - \dots],$$

$$v_4(v, q) = \sqrt{\frac{\pi}{\log(1/q)}} q'^{v^2+1/4} [(\rho'^{-1} + \rho') + q'^2(\rho'^{-3} + \rho'^3) + q'^6(\rho'^{-5} + \rho'^5) + \dots] \quad (5.12)$$

これらの式の打ち切りによる相対誤差は,

$$\varepsilon_n = q'^{n(n+1)-2nv} \quad (5.13)$$

から推定することができる.

5.3. procedure THETA(I, V, Q)⁽⁹⁾

これは q に対する $v_i(v, q)$ を求める real procedure であって, つぎの方針に従って計算を行なう.

(i) $q < 0.04$ に対しては, 5.1 の (i) - (iv) に従って,

$v_1(v), v_4(v)$ ($0 \leq v < 1$) の計算に還元する.

(ii) 計算はつぎの式による.

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(v, q) &= 2q^{1/4} (\sin w - q^2 \sin 3w + q^6 \sin 5w), \quad w = \pi v; \\ \mathcal{J}_4(v, q) &= 1 - 2q (\cos w - q^3 \cos 2w + q^8 \cos 3w), \quad w = 2\pi v \end{aligned} \quad (5.14)$$

(iii) $q \geq 0.04$ に対しては, (i) を經由した後には,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(v, q) &= \sqrt{\frac{\pi}{\log(1/q)}} q'^{(v^2 - 5v + 1/4)} (-q'^6 z^5 + q'^2 z^4 - z^3 \\ &\quad + z^2 - q'^2 z + q'^6), \\ \mathcal{J}_4(v, q) &= \sqrt{\frac{\pi}{\log(1/q)}} q'^{(v^2 - 5v + 1/4)} (q'^6 z^5 + q'^2 z^4 + z^3 \\ &\quad + z^2 + q'^2 z + q'^6), \quad z = q'^{2v}, \\ 0 \leq v &< 1/2 \end{aligned} \quad (5.15)$$

試験は, 後述の sn, cn, dn 関数を經由する間接的な方法をとったが, 有効数字10桁の範囲で十分信頼できる結果が得られた。

6. sn, cn, dn 関数

6.1. 各種の計算法

(1) 展開式

$$sn(u, k) = u - (1+k^2)u^3/3! + (1+14k^2+k^4)u^5/5! - \dots,$$

$$cn(u, k) = 1 - u^2/2! + (1+4k^2)u^4/4! - \dots,$$

$$dn(u, k) = 1 - k^2 u^2/2! + (4k^2 + k^4)u^4/4! - \dots$$

(6.1)

(2) 第一種楕円積分の逆関数として

$$\left. \begin{aligned} u &= F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \\ \operatorname{sn}(u, k) &= \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Landen の変換により, まず

$$\varphi_n = u \prod_{r=1}^n (2/(1+k_r)) \quad , \quad k_n \approx 0 \quad (6.3)$$

を求め,

$$\varphi_{r-1} = (\varphi_r + \sin^{-1}(k_r \sin \varphi_r))/2 \quad (6.4)$$

を反復適用して, 順次に $\varphi_n, \varphi_{n-1}, \dots, \varphi_0$ ($\varphi_0 = \varphi$) を決定する。これを (6.2) の中 2 式に代入して $\operatorname{sn}(u)$ を計算する。

(3) 算術幾何平均⁽³⁾

$$a_0 = 1, \quad b_0 = k', \quad k_0 = k$$

から出発し,

$$\left. \begin{aligned} a_r &= (a_{r-1} + b_{r-1})/2, \quad b_r = \sqrt{a_{r-1} b_{r-1}}, \\ c_r &= a_r - b_{r-1}, \quad k_r = c_r/a_r, \quad k'_r = b_r/a_r \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

を反復して, $c_n \approx 0$ となるまで“続けられ”, (6.3) に相当して,

$$\varphi_{n-1} = 2^{n-1} a_n u \quad (6.6)$$

が得られる。これを出発点として (6.4) を適用して φ_0 を定める。

$$\operatorname{sn}(u) = \sin \varphi_0, \quad \operatorname{cn}(u) = \cos \varphi_0 \quad (6.7)$$

$$dn(u) = \cos \varphi_0 \sec(\varphi_1 - \varphi_0) \quad (6.8)$$

(4) ϑ 関数との関係

$$\left. \begin{aligned} sn u &= \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)}, \\ cn u &= \frac{\vartheta_4}{\vartheta_2} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(v)} = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(v)}, \\ dn u &= \frac{\vartheta_4}{\vartheta_3} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_4(v)} = \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_4(v)} \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

たとえば $sn(u, k)$ を計算するには、まず k (または k^2) から q, K, K' を求め (たとえば QKKEE または QKK による), 変数を $v = u/(2K)$ に変えて, 上述の THETA によって $\vartheta_1(v, q)$ と $\vartheta_4(v, q)$ を計算すれば, (6.9) の第 1 式から, 簡単に結果が得られる。

この方針で sn, cn, dn に対する *procedure* を作ることは容易であるが, 計算量からいえば, 主プログラムの側で, (6.9) の計算を行なう方がはるかに経済的である。

6.2. 試験結果

上のような理由に基づき, sn, cn, dn 関数に対しては, 特別の *procedure* を作らず, QKK と THETA によって計算し, 既成の関数表 (小数第 5 桁) と比較したほか, 恒等式

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sn}^2(u, k) + \operatorname{cn}^2(u, k) &= 1, \\ k^2 \operatorname{sn}^2(u, k) + \operatorname{dn}^2(u, k) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

が成立するかどうかを、種々の k および u について調べた。結果は小数点以下10桁まで确实であることがわかった。

ただし、 $k=0$ に対しては、(6.9)が適用できないので、

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sn}(u, 0) &= \sin \pi v = \sin u, \\ \operatorname{cn}(u, 0) &= \cos u, \quad \operatorname{dn}(u, 0) = 1 \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

を用いなければならぬ。

7. Jacobi の E 関数

7.1. 計算法

(1) 楕円積分として

$$u = F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (7.1)$$

を満足する φ を求め (たとえば (6.5), (6.6), (6.4) より),
これを

$$E(u) = E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi \quad (7.2)$$

に代入すれば、 $E(u)$ を計算することができるとか、極めて不経済である。それは、(7.2)の計算に、Landen の変換

$$E(\varphi, k) = \frac{1}{1+k_1} E(\varphi, k_1) - \frac{1-k_1}{2} F(\varphi, k_1) + \frac{k_1}{1+k_1} \sin \varphi_1 \quad (7.3)$$

または算術幾何平均を繰り返す必要があるからである。

(2) \mathcal{V} 関数との関係^{(1),(2)}

$$\begin{aligned} E(u) &= \int_0^u dn^2(u, k) du \\ &= Z(u) + \frac{E}{K} u, \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} Z(u) &= \Theta'(u)/\Theta(u) \\ &= \frac{1}{2K} \frac{\mathcal{V}'_4(v, q)}{\mathcal{V}_4(v, q)}, \quad u = 2Kv \end{aligned} \quad (7.5)$$

q が小さいときは, (5.6) より,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_4(v, q) &= 1 - 2q \cos 2\pi v + 2q^4 \cos 4\pi v - 2q^9 \cos 6\pi v + \dots, \\ \mathcal{V}'_4(v, q) &= 2\pi (2q \sin 2\pi v - 4q^4 \sin 4\pi v + 6q^9 \sin 6\pi v \\ &\quad - \dots) \end{aligned} \quad (7.6)$$

q が 1 に近いときは, (5.9) より,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_4(v, q) &= \sqrt{\frac{K}{K'}} q'^{v^2+1/4} (\cosh \pi v' + q'^2 \cosh 3\pi v' \\ &\quad + q'^6 \cosh 5\pi v' + q'^{12} \cosh 7\pi v' + \dots), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}'_4(v, q) &= -2\pi v' \mathcal{V}_4(v, q) \\ &\quad + \sqrt{\frac{K}{K'}} q'^{v^2+1/4} \pi \frac{K'}{K} (\sinh \pi v' + 3q'^2 \sinh 3\pi v' \\ &\quad + 5q'^6 \sinh 5\pi v' + 7q'^{12} \sinh 7\pi v' + \dots) \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$v' = \frac{K}{K'} v = \frac{u}{2K'}, \quad q'^{v^2} = q^{v'^2}$$

7.2. procedure EJACOBI (U, KORK2, M)⁽⁹⁾

これは、前述の QKKEE と併用して、 u および k (または k^2) に対する $E(u)$ の値を求めるための real procedure であり、計算はつきの方針に従っている。

(i) まず QKKEE により、定数 K, K', E, E', q, q' を求める。

(ii) 変数の領域を $0 \leq u < 2K$ に制限するために、

$$E(u + 2K) = E(u) + 2E \quad (7.8)$$

を利用する。

(iii) $k^2 \leq 1/2$ に対しては、つぎの式により計算する。

$$E(u) = \frac{\pi}{K} 2q \frac{\sin w - 2q^3 \sin 2w + 3q^5 \sin 3w}{1 - 2q(\cos w - q^3 \cos 2w + q^5 \cos 3w)} + \frac{E}{K} u, \\ w = 2\pi v = (\pi/K) u \quad (7.9)$$

(iv) $k^2 > 1/2$ に対しては、

$$z = q'^{2v} = e^{-\pi u/K'} \quad (7.10)$$

と置いて、つぎの式を利用する。

$$E(u) = \frac{\pi}{2K'} \frac{-5q'^6 z^5 - 3q'^2 z^4 - z^3 + z^2 + 3q'^2 z + 5q'^6}{q'^6 z^5 + q'^2 z^4 + z^3 + z^2 + q'^2 z + q'^6} \\ + (1 - E'/K') u \quad (7.11)$$

この procedure の試験には、つぎの方法を採用した。すなわち、 E 関数に対する加法定理

$$E(u) + E(w) - E(u+w) = k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} w \operatorname{sn}(u+w) \quad (7.12)$$

の左辺を EJACOBI により，右辺を THETA により，別々に計算して両者を比較した。 $\epsilon^2 = 0.1(0.1)0.9, 0.95, 0.99$; $u = 0.5$ (一定); $w = 0.0(0.1)4.0$ について行なった計算結果は，有効数字10桁まで完全に一致した。ただし $u \leftarrow u - 2K$ の操作で，引数自体の精度が桁落ちのせいに失われたような場合は，若干の不一致が起る。

例. $\epsilon^2 = 0.8$ ($2K = 4.514 \dots$), $u = 0.5$

$w = 3.8$	(7.12) の左辺	0.04898 34112 840	右辺 814
3.9		0.02347 54606 624	 560
4.0		0.00256 05166 187	 064

8. Z 関数

8.1. Jacobi の諸関数の計算における問題点

二次元ポテンシャルの解析に当っては， $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, $E(u)$ などの関数を使うのが極めて便利であるが，これらをそのまま数値計算に移すことは，つぎのような英で不都合を生ずる場合が多い。

- (i) これらの関数は副変数として ϵ を用いるが，多くの問題では ϵ が 1 に近い場合が重要なのであって，計算機の1語では，正確な情報が維持できない場合も起りうる。

(ii) これらの関数は, ψ 関数の比 (または ψ' と ψ の比) として計算するのが最も能率的であるが, 各関数に対して独立の *procedure* を作るとすれば, それらに共通な成分 (分母の ψ 関数) を何度も繰り返して計算するという無駄を避けることができないう。

(iii) 同様に, 関数の計算に必要な定数 (特に K, E など) を, 同じ ψ に対して, 何度も求めなければならぬ。

このような事情を顧慮すれば, 計算計画に当っては,

- (i) q をすべての出発点とする,
- (ii) sn, cm, dn 関数は, (6.9) により, ψ 関数で表わす,
- (iii) E 関数は, (7.4), (7.5) により, Z 関数 (ただし, 変数は v , 副変数は q とする) で表わす,

のが最も合理的であると思われる。

この目的に対しては, 上に述べた *procedure* のうち, 諸定数の計算には, $CEIQ$ と $THZERO$ の二つ, 関数の計算には $THETA$ が適当であるが, このほかに, Z 関数または E 関数を求めるための $ZETA$ が必要である。

8.2. *procedure* $ZETA(V, Q)$ ⁽⁹⁾

関数 $Z(u)$ は, $sn(u, k)$ などと同様に, 本来 u と k の関数であるが, 上に述べた理由により, $v = u/(2K)$ と

$q = e^{-\pi K'/K}$ を与えて, $Z(u)$ の値を求める procedure があると極めて好都合である。real procedure ZETA (v, Q) は, この目的のために作られたもので, たとえば $E(u)$ を計算するには,

$$E(u) = \text{ZETA}(v, q) + 2Ev \quad (8.1)$$

とすればよいのであって, 必要な定数は, 主プログラムの例で, 1個の k に対して 1回だけ計算しておけばよい。

ZETA の内部における計算は, EJACOBI の一部を利用するだけであるから, 特に説明を加える必要はないであろう。

計算の結果は, EJACOBI と一致するはずであるが, 上述の理由により, u が $2K$ に近い所では若干の不一致が生じる。

例. $k^2 = 0.5$ ($2K = 3.708 \dots$)

	EJACOBI による $E(u)$	ZETA による $E(u)$
$u = 3.6$	<u>2.59334 84944</u>	<u>2.59334 84855</u>
3.7	<u>2.69313 84977</u>	<u>2.69313 84843</u>
3.8	<u>2.79300 95833</u>	<u>2.79300 95832</u>

9. Π 関数について

第三種楕円積分は, Π 関数

$$\Pi(u, \alpha) = k^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha \int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u \, du}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \operatorname{sn}^2 u} \quad (9.1)$$

を用いて, つぎのように表わすことができる.

$$\int_0^z \frac{dz}{(z^2 - a^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} = -\frac{k^2 \operatorname{sn}^3 \alpha}{\operatorname{cn} \operatorname{dn} \operatorname{dn} \alpha} \left(\frac{\operatorname{cn} \operatorname{dn} \operatorname{dn} \alpha}{\operatorname{sn} \alpha} u + \pi(u, \alpha) \right), \quad (9.2)$$

$$\operatorname{sn} \alpha = 1/(ka)$$

一方において π 関数は,

$$\pi(u, \alpha) = \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u-\alpha)}{\Theta(u+\alpha)} + u Z(\alpha) \quad (9.3)$$

と書くことができるので, 実変数に対しては, (9.1) や (9.2) を, 上述の procedure によって計算することができる.

$$\left. \begin{aligned} \Theta(u \mp \alpha) &= \text{THETA}(4, (u \mp \alpha)/(2K), q), \\ Z(\alpha) &= \text{ZETA}(\alpha/(2K), q) \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

10. q が 1 に近い場合の対策⁽¹⁰⁾

10.1. 上述の計算法の限界

上に述べたすべての procedure は, k^2 を基調とする限り, $k^2 \leq 0.9999999999$ までは, 必要量を 10 桁の精度で計算することができるが, $1 - 4q$ を基調とする場合には, $q \leq 0.7$ を一つの適用範囲とみるのが安全であろう. したがって, $0.7 < q < 1$ に対しては, 別な方法によらなければならぬが, 実はこのような範囲での計算は, 極めて簡単な

近似式で高精度の結果を与えるものである。ただ一つの障害は、 q' の指数部の underflow による制限であって、若干の工夫によって適用範囲を広げうる場合もあるが、 $0.9 < q$ のような領域が実際上の意味をもつかどうかは疑問である。

さて、 $q = 0.7$ に対しては、

$$q' = 0.96066\ 95864 \times 10^{-12},$$

$$k^2 = 1 - k'^2, \quad k'^2 = 0.15370\ 71181 \times 10^{-10},$$

$$K = 13.83557\ 293, \quad K' = 1.57079\ 6327,$$

$$E = 1.00000\ 00000, \quad E' = 1.57079\ 6327$$

となるので、10桁の精度を要求される場合でも、

$$k^2 = 1, \quad E = 1, \quad K' = E' = \pi/2, \quad (q > 0.7) \quad (10.1)$$

と置くことができる。

10.2. 定数の計算

(1) v_1' および v_i

$$p' = q'^{1/4} = \exp\left(-\frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\log q}\right) \quad (10.2)$$

と置けば、

$$\left. \begin{aligned} v_1' &= 2\pi \left(-\frac{\pi}{\log q}\right)^{3/2} p', \\ v_2 &= v_3 = \left(-\frac{\pi}{\log q}\right)^{1/2}, \\ v_4 &= 2 \left(-\frac{\pi}{\log q}\right)^{1/2} p' \end{aligned} \right\} \quad q > 0.7 \quad (10.3)$$

HITAC 5020 の場合は, $q \approx 0.9$ で q' が underflow を起こすか, (10.2) の p' , したがって (10.3) は, $q \approx 0.97$ まで計算できるはずである。

(2) K

式 (10.1) が成立する場合にも, K の値だけは q に依存する。その計算は,

$$K = -\pi^2 / (2 \log q), \quad q > 0.7 \quad (10.4)$$

によって, ほとんど無制限に行なうことができる。

(3) k'

基本式から,

$$k' = 4q'^{1/2}, \quad q > 0.7 \quad (10.5)$$

が得られるが, (10.2) の p' を用いて,

$$k' = 4p'^2 \quad (10.6)$$

とした方が, 適用範囲は広がる ($q \approx 0.94$ まで)。ただし, k'^2 は $q \approx 0.89$ で underflow を起こす。

10.3. 実数の計算

(1) $v_i(v, q)$

上述のように, 関数の種類としては $v_1(v)$ と $v_4(v)$, 変数の領域としては, $0 \leq v < 1/2$ だけを考えればよい。ただしこの場合にも, q' の値が underflow をなすべく起

こまかいような配座が必要である。

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1(v, q) &= \left(-\frac{\pi}{\log q}\right)^{1/2} q^{(v^2+1/4)} (q'^{-v} - q'^v), \\ \vartheta_4(v, q) &= \left(-\frac{\pi}{\log q}\right)^{1/2} q^{(v^2+1/4)} (q'^{-v} + q'^v) \end{aligned} \right\} \\ 0.7 < q, \quad 0 < v < 1/2 \quad (10.7)$$

HITAC 5020 の場合は, $q \approx 0.94$ まで計算可能。

(2) $Z(u)$

$$Z(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} - \frac{u}{K}, \quad 0 \leq u < K, \quad q > 0.7 \quad (10.8)$$

$$\text{ZETA}(v, q) = \frac{q'^{-v} - q'^v}{q'^{-v} + q'^v} - 2v, \quad 0 \leq v < 1/2, \quad q > 0.7 \quad (10.9)$$

(3) $\text{sn } u, \text{cn } u, \text{dn } u$

$$\text{sn}(u, k) = \tanh u, \quad \left. \begin{aligned} \text{cn}(u, k) &= \text{dn}(u, k) = \text{sech } u \end{aligned} \right\} k \approx 1 \quad (10.10)$$

$$\text{sn}(u, k) = \frac{q'^{-v} - q'^v}{q'^{-v} + q'^v}, \quad \left. \begin{aligned} \text{cn}(u, k) &= \text{dn}(u, k) = \frac{2}{q'^{-v} + q'^v} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &0 \leq v < 1/2, \\ &q > 0.7 \end{aligned}$$

$$\text{cn}(u, k) = \text{dn}(u, k) = \frac{2}{q'^{-v} + q'^v} \quad (10.11)$$

(4) $E(u)$

$$E(u) = \tanh u$$

$$= \frac{q'^{-v} - q'^v}{q'^{-v} + q'^v}, \quad 0 \leq v < 1/2, \quad q > 0.7 \quad (10.12)$$

文 献

- (1) 竹内端三：橋岡関数論，岩波書店 (1939)
- (2) 友近晋：橋岡関数論，河出書房 (1943)
- (3) G.N. Lance: Numerical Methods for High Speed Computers, Iliffe and Sons (1960)
- (4) Jahnke-Emde: Funktionentafeln, Teubner (1933)
- (5) 林桂一，森口繁一：高等関数表，第2版，岩波書店 (1967)
- (6) 高橋秀俊：完全橋岡積分 $K(\tau)$, $E(\tau)$ の計算について，PC-1 Document No.9 (1960)
- (7) 山本敦子：QNOM, CEIK, CEIE, EJSN, EJCN, EJDN
東京大学大型計算機センターライブラリプログラム，第I集 (1967)
- (8) 清野，藤井：橋岡関数に関連した定数の計算について，京都大学計算センター月報，vol.4, no.10 (1969)
- (9) 清野，藤井：橋岡関数の計算について，同上，no.11(1969)
- (10) 清野，藤井：橋岡関数の計算についての補遺，同上，no.12, 予定

追記

報告後の討論において、ライブラリプログラムに関する一つの問題点として、“利用上の便宜と計算機の無駄使いをどのように調整すべきか”が論議された。

たとえば、本文に述べたように、 sm , cn , dn 関数のためのサブルーティーンが登録されていれば、利用者が便宜を受ける場合も多いであろうが、反面、計算機時間の浪費を奨励する結果にもなりかねない。この問題を解決するため、

(1) 登録されているプログラムを活用して、特殊な関数を経済的に計算する方法を、マニュアルやニュースを通じて、推薦ないし指導する。

(2) 一方、すべての関数に対するプログラムを登録しておく、利用上の便利さと、経済性のいすれをとるかは、適切な情報を与える上で、利用者の選択にまかせる。

という提案がなされたが、いすれも得失があり、結論は得られなかった。

また、この種の問題が、専用関数に限らず、ライブラリプログラムに一般に関する考え方として、重要な意味をもつことが、改めて認識された。